Università degli Studi di Firenze
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Matematica

CORDE VIBRANTI E NUMERI IRRAZIONALI

Tesi di Laurea in Matematica

Candidato:
Fabio Coppini
fabio.coppini@stud.unifi.it

Relatore:
Prof. Rolando Magnanini
magnanin@math.unifi.it

Sessione 15 Ottobre 2014
Anno Accademico 2013/2014

Indice

Introduzione

Consideriamo una corda di lunghezza π, fissata ai due estremi, che vibra. Supponiamo di conoscere, fissata una particolare ascissa, l'ordinata del punto corrispondente sulla corda, al variare del tempo. Vedremo che il problema è in generale mal posto nel senso di Hadamard: infatti, una soluzione non sempre esiste; quando esiste, essa non è sempre unica; infine, quando anche esista una sola soluzione, non è detto che questa sia stabile e cioè che dipenda con continuità dai dati iniziali[1].

Vedremo che il soddisfacimento dei tre requisiti appena citati dipende principalmente da come si sceglie l'ascissa del punto fissato. Se quest'ultima è razionale, l'eventuale soluzione non è mai unica; se invece è irrazionale, sussiste l'unicità, ma non è detto che esista una ragionevole soluzione: tutto dipende da come è possibile approssimare il numero in questione mediante numeri razionali. Questa è la parte più interessante del problema, perché, stabilita una sorta di *misura di irrazionalità*, troveremo che la buona posizione del problema è tanto più possibile quanto più l'ascissa scelta è *irrazionale*.

Mostreremo infine che si può ripristinare la stabilità del problema, cercando soluzioni che soddisfano una certa limitazione di tipo energetico.

1 Il problema della corda vibrante

Il moto della corda vibrante fissata agli estremi si può descrivere con una certa approssimazione mediante una funzione $u(x,t)$ dell'ascissa x e del tempo t, che soddisfa la nota equazione delle onde unidimensionale:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0. \tag{1}$$

Il dominio che consideriamo è costituito dal rettangolo

$$Q = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq 2\pi\};$$

le condizioni al contorno, dette di Dirichelet, sono:

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi. \tag{2}$$

Il problema in esame consiste nel ricostruire $u(x,t)$ per ogni $(x,t) \in Q$ conoscendo il moto di u nel punto $\alpha\pi$, si suppone cioè che u soddisfi la condizione

$$u(\alpha\pi,t) = f(t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi, \tag{3}$$

[1] Per la definizione di stabilità data da Hadamard si veda [5].

dove α è una costante data in $(0, 1)$ e f è una funzione nota abbastanza regolare.

Applicando il metodo di separazione delle variabili della teoria classica delle equazioni a derivate parziali, tutte le possibili soluzioni di (1) e (2) si possono scrivere nella forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin nx(a_n \cos nt + b_n \sin nt). \tag{4}$$

Si osservi che non è detto che la soluzione del nostro problema esista: l'esistenza dipende, oltre che da α, da come è fatta la funzione f. Poiché (3) e (4) implicano

$$f(t) = u(\alpha\pi, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\alpha\pi(a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{5}$$

il metodo di Fourier ci dice che

$$a_n = \frac{A_n}{\sin n\alpha\pi}, \quad b_n = \frac{B_n}{\sin n\alpha\pi}, \tag{6}$$

dove A_n e B_n sono i coefficienti di Fourier di f.

È chiaro che se α è un numero razionale $\frac{p}{q}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha n \in \mathbb{N}$, cioè per tutti gli n multipli di q, $\sin n\alpha\pi = 0$ e dunque non si potranno calcolare i rispettivi coefficienti a_n e b_n; per avere soluzione la funzione f non potrà quindi essere arbitrariamente scelta. Se invece α è irrazionale, a_n e b_n sono ben definiti da (6), ma questo non basta: non sappiamo ancora se la serie (4) che definisce la possibile soluzione (e quelle che definiscono le sue derivate prime e seconde) converge. Questo dipende da come si sceglie α fra i numeri irrazionali.

1.1 Esistenza e unicità della soluzione

Unicità: considerazioni su α

Osserviamo subito dalla (5) che se α è un numero irrazionale allora per il problema (1)-(3) vale il seguente risultato di unicità.

Proposizione 1. *Se α è un numero irrazionale allora il problema (1)-(3) ammette al più una soluzione u di classe C^2.*

Dimostrazione. Supponiamo esistano due soluzioni u_1 e u_2, allora la loro differenza $u = u_1 - u_2$ risolve (1) con condizione iniziale $f \equiv 0$, cioè

$$0 = u(\alpha\pi, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\alpha\pi(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Nelle ipotesi date, la teoria delle serie di Fourier ci dice che devono annullarsi i coefficienti $a_n \sin n\pi\alpha$ e $b_n \sin n\pi\alpha$. Poiché α è irrazionale $\sin n\alpha\pi$ è diverso da zero per ogni $n \in \mathbb{N}$, deve quindi essere che $a_n = b_n = 0$, cioé $u_1 = u_2$. □

È chiaro che se α è un numero razionale l'unicità non è garantita. Come riportiamo nella seguente

Proposizione 2. *Se α è un numero razionale allora il problema (1)-(3) non ammette soluzione unica.*

Dimostrazione. Sia $\alpha = \frac{p}{q}$ con p e q numeri interi coprimi. Se u è una soluzione del problema (1)-(3), allora anche $v(x,t) = u(x,t) + \sin qx \cos qt$ lo è, infatti:

$$v(\alpha\pi, t) = u(\tfrac{p\pi}{q}, t) + \sin p\pi \cos p\pi = u(\tfrac{p\pi}{q}, t) = u(\alpha\pi, t).$$

Esistono quindi almeno due soluzione distinte per il problema (1)-(3) se α è razionale. □

Ulteriori considerazioni sull'unicità possono essere fatte studiando come varia il problema al variare del dominio scelto; poiché questo non è l'oggetto principale della tesina, rimandiamo il lettore agli articoli [3] e [11] per maggiori informazioni.

Esistenza e approssimazione diofantea

La questione dell'esistenza della soluzione è più intricata rispetto a quanto si possa pensare: entra qui in gioco la natura del numero α.

Diamo qualche definizione per caratterizzare le proprietà che ci interessano[2]. Un numero irrazionale $\alpha \in \mathbb{R}$ si dice *di tipo* Ω se Ω è l'estremo superiore fra tutti i numeri reali ω che soddisfano

$$0 < |\alpha - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{1}{q^{1+\omega}}$$

per infiniti $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.

Chiariremo meglio in seguito l'idea dietro questa definizione; per adesso possiamo pensare ad Ω come ad una particolare misura dell'irrazionalità di un dato numero reale. Nella seguente proposizione con $[\Omega]$ indichiamo la parte intera del numero reale Ω.

Proposizione 3. *Sia α un irrazionale di tipo $\Omega < +\infty$ e sia $f \in C^{4+[\Omega]}(\mathbb{R})$ una funzione periodica di periodo 2π.*
Allora esiste una soluzione $u \in C^2(Q)$ del problema (1)-(3).

[2] Maggiori informazioni si trovano nell'appendice A.

Dimostrazione. Osserviamo preliminariamente che, se f è una funzione di classe C^k periodica di periodo 2π, allora i coefficienti A_n e B_n del suo sviluppo in serie di Fourier sono tali che $A_n, B_n = O(n^{-k})$.
Dalla teoria di Fourier, si ha che:

$$2\pi(A_n + iB_n) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \left|\tfrac{e^{-int}}{-in} f(t)\right|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\tfrac{e^{-int}}{-in}dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} f'(t)\tfrac{e^{-int}}{-in}dt,$$

dove abbiamo integrato per parti e sfruttato la periodicità di f. In modulo abbiamo quindi ottenuto:

$$|A_n|, |B_n| \leq |A_n + iB_n| \leq \tfrac{C}{n}, \qquad \text{con } C = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} |f'(t)|dt.$$

In questo caso abbiamo sfruttato il fatto che $f \in C^1$; se dunque $k \geq 2$ questo procedimento si può iterare fino alla derivata $k - esima$, ottenendo

$$A_n + iB_n = (-1)^k \tfrac{1}{2\pi n^{k-1}} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)\tfrac{e^{-int}}{-in}dt$$

e quindi

$$|A_n|, |B_n| \leq |A_n + iB_n| \leq \tfrac{C}{n^k}, \qquad \text{con } C = \tfrac{1}{2}\pi \int_0^{2\pi} |f^{(k)}(t)|dt.$$

Dunque se $f \in C^{4+[\Omega]}(\mathbb{R})$, dato che per la (3) deve essere

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\alpha\pi(a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

abbiamo che

$$a_n \sin n\alpha\pi = O(n^{-4-[\Omega]}), \qquad b_n \sin n\alpha\pi = O(n^{-4-[\Omega]}).$$

Chiamato $k = 4 + [\Omega]$, consideriamo adesso la soluzione u espressa in (4): questa converge totalmente e quindi uniformemente se converge la serie numerica che otteniamo sfruttando l'ipotesi su a_n e b_n, e cioè se converge la seguente serie

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \tfrac{1}{n^k |\sin n\pi\alpha|}.$$

È chiaro che tutto dipende dal comportamento del seno e quindi da n ed α: mostriamo che tanto più α è un numero irrazionale, dunque con misura di irrazionalità piccola, tanto più sarà difficile che $n\alpha$ tenda ad essere un numero intero e dunque che $\sin n\pi\alpha$ si annulli facendo divergere la serie.

Dalla definizione di α esistono due successioni crescenti di naturali $\{q_n\} = T$ e $\{p_n\}$ tali che $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$. I termini della serie che ci daranno più fastidio saranno chiaramente gli $n \in T$; spezziamo dunque la sommatoria in

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^k |\sin n\pi\alpha|} = \sum_{n \in T} \frac{1}{n^k |\sin n\pi\alpha|} + \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus T} \frac{1}{n^k |\sin n\pi\alpha|},$$

se riusciamo a dimostrare che la prima serie converge allora anche la seconda convergerà.

Seguendo la definizione, riscriviamo α in questo modo(con un abuso di notazione intenderemo q per q_n):

$$\alpha = \frac{p}{q} + O(\frac{1}{q^{1+[\Omega]}});$$

da ciò risulta che

$$n\pi\alpha = n\frac{p}{q}\pi + nO(\frac{1}{q^{1+[\Omega]}})\pi = p\pi + O(\frac{1}{q^{[\Omega]}})\pi,$$

se $n \in T$. Poiché $q \to +\infty$ otteniamo:

$$\sin(q\pi\alpha) = \sin(\pi O(\frac{1}{q^{[\Omega]}})) = O(\frac{1}{q^{[\Omega]}}).$$

Sostituendo nella sommatoria e ricordando che $k = 4 + [\Omega]$, abbiamo che, per qualche costante C,

$$\sum_{n \in T} \frac{1}{n^k |\sin n\pi\alpha|} \leq C \sum_{q \in T} q^{[\Omega]-k} = C \sum_{q \in T} \frac{1}{q^4},$$

e questa serie converge.

Per la serie derivata prima e derivata seconda compariranno rispettivamente un n ed un n^2 al numeratore, dati dalla derivazione di $\sin nt$ e $\cos nt$. In ogni caso le due serie convergeranno totalmente poiché maggiorate rispettivamente dalle serie $\sum_{q \in T} \frac{1}{q^3}$ e $\sum_{q \in T} \frac{1}{q^2}$ che convergono. $\square$

1.2 Considerazioni sulla stabilità

Fissato $\alpha = \frac{p}{q}$ razionale sappiamo che esiste una successione di numeri reali α_n che converge ad esso. Mostriamo adesso che esistono una succesione di funzioni f_n limitate ed una rispettiva successione di soluzioni u_n le cui norme tendono a più infinito.

Proposizione 4. *Siano $p, q \in \mathbb{N}$, con $p < q$, e sia α_n una successione di numeri irrazionali convergenti a $\frac{p}{q}$. Sia dunque u_n la soluzione in $C^2(Q)$ del problema (1), (2), e*

$$u_n(\alpha_n\pi, t) = f_n(t) = \sin qt.$$

Allora

$$\lim_{n->+\infty} \|u_n\|_{L^2(Q)} = +\infty.$$

Dimostrazione. La soluzione con queste condizioni su f è data da:

$$u_n(x,t) = (\sin q\alpha_n \pi)^{-1} \sin qt \sin qx.$$

Si osserva che, poiché α_n tende a $\frac{p}{q}$, il fattore $\sin q\alpha_n\pi$ tende a zero e dunque la norma

$$\|u_n\|_{L^2(Q)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} |(\sin q\alpha_n\pi)^{-1}|$$

non risulta limitata. □

Mostriamo che se α è irrazionale allora esistono una successione di funzioni f_n, convergente uniformemente a zero, ed una rispettiva successione di soluzioni u_n che ammette una sottosuccessione divergente in norma.

Proposizione 5. *Sia α irrazionale, allora esiste una successione di funzioni periodiche $f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$ di periodo 2π, uniformemente convergente a zero, tale che le funzioni $u_n \in C^2(Q)$ che soddisfano (1), (2) e*

$$u_n(\alpha\pi, t) = f_n(t), \tag{7}$$

sono tali che

$$\limsup_{n->+\infty} \|u_n\|_{L^2(Q)} = +\infty. \tag{8}$$

Dimostrazione. Sia

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt;$$

la soluzione corrispondente a f_n è data da

$$u_n(x,t) = (\sqrt{n} \sin n\alpha\pi)^{-1} \sin nt \sin nx.$$

È chiaro che f_n converge a zero uniformemente in tutto $\mathbb{R}$ e dunque soddisfa le nostre ipotesi.

È noto che[3] esistono due successioni di interi p_n, q_n tali che

$$\lim_{n->+\infty} q_n = +\infty, \qquad |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2};$$

per le formule di addizione e sfruttando il fatto che $|\sin x| < |x|$ si ha :

$$|\sin q_n\alpha\pi| = |\sin(q_n\alpha - p_n)\pi| < |(q_n\alpha - p_n)\pi| < \frac{\pi}{q_n}.$$

Si ricava dunque la seguente minorazione

$$\frac{\sqrt{q_n}}{\pi} |\sin q_n t \sin q_n x| < |u_{q_n}(x,t)|,$$

che in norma tende a $+\infty$. □

[3] Vedere [14] p. 128.

Possiamo concludere che se i dati iniziali f e α non sono noti completamente, nessuna approssimazione della soluzione può essere ottenuta senza fare delle supposizioni ulteriori sulla soluzione stessa. In particolare dai due esempi trattati si osserva che, nonostante la successione f_n sia sempre limitata, è possibile costruire una sottosuccessione di soluzioni che diverge, il che implica che il problema non è ben posto.

Nella seconda parte mostreremo che, supponendo una limitazione dell'energia per la soluzione e dunque andando a considerare come soluzioni solo quelle che fanno parte di una certa classe energetica, si può ripristinare la stabilità del problema: eliminiamo di fatto tutte le successioni di soluzioni le cui energie divergono, ovvero che non sono definitivamente contenute in tale classe.

2 Limitazione energetica per la soluzione del problema

Mostriamo adesso che imponendo a priori un limite energetico globale per la soluzione, il problema risulta ben posto: riusciamo infatti a stabilire una dipendenza continua fra dati e soluzione. Considerazioni di carattere energetico furono in principio pensate per la stabilità del problema di Cauchy delle equazioni ellittiche e già Hadamard si era reso conto, grazie al professor Pucci, dell'importanza di tali limitazioni. Nell'articolo [1] si possono trovare riferimenti ed una trattazione più generale di tale problema.

È interessante notare che, se vogliamo associare al nostro modello un'interpretazione fisica, l'introduzione di tale limitazione energetica implica che la corda compia piccole oscillazioni. Tali ipotesi *fisiche* sono quelle che generalmente vengono fatte a priori affiché valga il modello lineare per l'equazione delle onde che abbiamo considerato.

Notazioni

Siano α, ϵ, E costanti reali positive con $0 < \alpha < 1$. Sia $f \in L^2(0, 2\pi)$ e sia $\Gamma(\epsilon, E)$ l'insieme formato dalle funzioni $u \in C^2(Q)$ che soddisfano (1), (2) e:

$$\|u(\alpha\pi, \cdot) - f\|_{L^2(0,2\pi)} \leq \epsilon, \tag{9}$$

$$\|u_x\|_{L^2(Q)} \leq E. \tag{10}$$

La condizione (9) sostituisce la vecchia (3) e ci permette di conoscere f con un certo errore; la condizione (10) rappresenta il limite energetico che adesso richiediamo per la soluzione.

Poniamo

$$\|u\|^2 = \sup_{x\in[0,\pi]} \int_0^{2\pi} u^2(x,t)dt, \tag{11}$$

$$\Delta(\epsilon, E) = \sup_{v,w\in\Gamma(\epsilon,E)} \|v-w\|. \tag{12}$$

Quest'ultima quantità rappresenta il diametro dell'insieme $\Gamma(\epsilon, E)$. Vogliamo ora mostrare che più la costante ϵ è trascurabile rispetto ad E più $\Delta(\epsilon, E)$ tende a essere piccolo.

2.1 Ripristino della stabilità

Supposto il limite energetico (10) per la u, ci preme mostrare la continuità fra dati e soluzione. In particolare notiamo che più si aumenta l'incertezza sul dato iniziale f, più il diametro dell'insieme delle soluzioni cresce; adesso è però possibile trovare una limitazione per tale diametro che dipenderà proprio dalla costante E e dall'incertezza ϵ.

2.1.1 Caso α razionale

Mostriamo che se ϵ è piccolo rispetto a E allora una buona scelta di $\alpha = \frac{p}{q}$ rende la possibilitá di ottenere il diametro $\Delta(\epsilon, E)$ piccolo. Una cattiva scelta potrebbe essere $\alpha = 1/2$, otterremo infatti un diametro non più piccolo della costante E scelta.

Teorema 6. *Sia α un numero razionale, $\alpha = \frac{p}{q}$, con p e q primi fra loro, e sia*

$$q^2 < 2\frac{E}{\epsilon}.$$

Allora abbiamo che

$$\Delta(\epsilon, E) \le 3\frac{E}{q}. \tag{13}$$

Dimostrazione. Siano $v, w \in \Gamma(\epsilon, E)$; chiaramente $u = v - w \in C^2(Q)$. In particolare u soddisfa (1), (2) e le seguenti disuguaglianze:

$$\|u(\alpha\pi, \cdot)\|_{L^2(0,2\pi)} \le 2\epsilon, \qquad \|u_x\|_{L^2(Q)} \le 2E. \tag{14}$$

Esplicitiamo le due norme, usando la rappresentazione di u data in (4); per l'identità di Parseval, risulta che

$$\|u(\alpha\pi, \cdot)\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \sin^2 n\alpha\pi.$$

Dalla prima disuguaglianza in (14) si ricava quindi:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)\sin^2 n\alpha\pi \leq 4\tfrac{\epsilon^2}{\pi}, \tag{15}$$

e dalla seconda:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2)n^2 \leq 8\tfrac{E^2}{\pi^2}. \tag{16}$$

Il diametro dell'insieme $\Gamma(\epsilon, E)$ si può quindi maggiorare così:

$$\Delta^2(\epsilon, E) \leq \pi \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2) : a_n, b_n \ soddisfano \ (15) \ e \ (16)\right\}.$$

Ponendo, $x_n = a_n^2 + b_n^2$, questo problema vincolato equivale a massimizzare una funzione lineare di infinite variabili soggetta a due vincoli lineari. Dopo qualche calcolo, si ottiene la seguente maggiorazione (per eccesso):

$$\Delta^2(\epsilon, E) \leq 8\epsilon^2\left\{\min_{r\in\mathbb{N}}\left[\sin^2 r\tfrac{p}{q}\pi + (\tfrac{\epsilon^2}{E^2})r^2\right]\right\}^{-1}. \tag{17}$$

Dall'ipotesi $q^2 \leq 2\frac{E}{\epsilon}$ abbiamo:

$$\tfrac{\epsilon^2}{E^2} \leq \tfrac{4}{q^4} \leq \tfrac{4}{q^2(q^2-1)} \leq \frac{\sin^2\frac{\pi}{q}}{q^2-1} \leq \frac{\sin^2 r\frac{p}{q}\pi}{q^2-r^2}, \qquad 1 \leq r \leq q;$$

ne segue che

$$\sin^2 r\tfrac{p}{q}\pi + \tfrac{\epsilon^2}{E^2}r^2 \geq \tfrac{\epsilon^2}{E^2}q^2, \qquad 1 \leq r \leq q,$$

che sostituito nella (17) ci dà la tesi. □

2.1.2 Caso α irrazionale

Per poter trattare il caso in cui α è irrazionale, abbiamo bisogno della teoria delle frazioni continue (si veda per esempio [6]).

Sia

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

la rappresentazione in frazione continua di α; i quozienti parziali a_n sono interi maggiori o uguali a 1.

Nel prossimo teorema considereremo solo gli α irrazionali quadratici e cioè quegli irrazionali che sono soluzioni di qualche equazione di secondo grado a coefficienti razionali. Sappiamo infatti che gli irrazionali quadratici sono densi in $(0, 1)$[4] e che il loro sviluppo in frazione continua è definitivamente periodico e cioè che da un certo $\overline{n}$ in poi i quozienti parziali si ripetono

[4] Vedere [11] per maggiori informazioni.

periodicamente. Tale proprietà garantisce l'esistenza di un limite superiore per gli a_n, che agevolerà la dimostrazione, e che indicheremo con K_α.

Nel caso in cui α è un generico numero irrazionale di tipo $\Omega < +\infty$, tali risultati si possono estendere seguendo una strada analoga[5].

Teorema 7. *Sia α un numero irrazionale quadratico e sia K_α una limitazione superiore per i suoi quozienti parziali. Abbiamo che*

$$\Delta(\epsilon, E) \leq 2\sqrt{2}\sqrt{\tfrac{K_\alpha+2}{\sqrt{27}}}\sqrt{\epsilon E}. \tag{18}$$

Dimostrazione. La prima parte della dimostrazione si sviluppa come quella del Teorema 6. In questo caso otteniamo la limitazione:

$$\Delta^2(\epsilon, E) \leq 8\epsilon^2 \left\{ \min_{n\in\mathbb{N}} \Big[\sin^2 n\alpha\pi + \tfrac{\epsilon^2}{E^2} n^2 \Big] \right\}^{-1}.$$

Grazie ad un risultato della teoria delle frazioni continue (vedere [6], p. 37), si ha:

$$\sin^2 n\alpha\pi \geq \tfrac{27}{4(K_\alpha+2)^2 n^2}, \qquad n \geq 1.$$

Utilizzando la disuguaglianza fra media aritmetica e geometrica, segue che

$$\tfrac{27}{4(K_\alpha+2)^2 n^2} + \tfrac{\epsilon^2}{E^2} n^2 \geq \tfrac{\epsilon}{E}\tfrac{\sqrt{27}}{K_\alpha+2} = \tfrac{\epsilon}{E}\tfrac{\sqrt{27}}{K_\alpha+2}.$$

Si ottiene quindi

$$\Delta^2(\epsilon, E) \leq 8\tfrac{K_\alpha+2}{\sqrt{27}}\epsilon^2 \tfrac{E}{\epsilon},$$

passando alla radice quadrata si ha la tesi. □

A Misura d'irrazionalità

Vogliamo fornire in questa appendice un quadro più chiaro riguardo gli strumenti utilizzati nel capitolo sull'esistenza della soluzione; in particolare si vuol fissare qualche punto sull'approssimazione diofantea e sul concetto di misura d'irrazionalità di un numero.

Intuitivamente dato un numero $\alpha \in \mathbb{R}$, la sua misura di irrazionalità ci dice quanto questo possa essere approssimato rapidamente da numeri razionali: maggiore sarà la sua misura e più velocemente potrà essere approssimato. La definizione rigorosa che abbiamo dato a pagina 4 è in realtà una generalizzazione di quella data per i *numeri di Liouville*: un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ si dice *di Liouville* se per ogni numero naturale n esistono degli interi p e q con $q > 1$ tali che

$$0 < |\alpha - \tfrac{p}{q}| < \tfrac{1}{q^n}.$$

[5]Per una trattazione più approfondita si rimanda a [13].

Possiamo riscrivere la definizione di irrazionalità in questo modo: se α ha *misura di irrazionalità* μ, allora μ è il più piccolo numero per cui vale:

$$|\alpha - \tfrac{p}{q}| > \tfrac{1}{q^{\mu+\epsilon}},$$

per ogni $\epsilon > 0$ e per tutte le coppie di interi p, q con q sufficientemente grande. Secondo questa nuova definizione vale che $\mu(\alpha) = \Omega(\alpha) - 1$, dove con $\Omega(\alpha)$ si intende il *tipo di* α definito precedentemente.

Nel 1844 Liouville dimostrò che tutti i numeri che prendono il suo nome sono trascendenti e quindi irrazionali; più propriamente dimostrò, per la prima volta, l'esistenza dei numeri trascendenti. Nello stesso anno scoprì quella che poi venne chiamata *costante di Liouville*: tale costante è fra l'altro un numero che, come tutti i numeri di Liouville, sviluppato in frazione continua ha quozienti parziali che possono crescere indefinitivamente[6].

Si può dimostrare che l'insieme dei numeri di Liouville, ovvero di quei numeri che hanno misura di irrazionalità infinita, nell'intervallo [0,1] è denso, non numerabile e con misura di Lebesgue e di Hausdorff(s-dimensionale, $0 \leq 1$,) nulle[7]. A fine Ottocento Cantor dimostrò che i numeri algebrici sono numerabili, provando dunque che i trascendenti hanno misura infinita su $\mathbb{R}$. Sapendo quindi che i numeri di Liouville hanno misura nulla, deve essere che non tutti i numeri trascendenti sono di Liouville: il celebre numero π è un esempio classico di numero trascendente che non è di Lioville; la dimostrazione di questo fatto è stata data da Kurt Mahler solo recentemente, nel 1953 ([9]).

Più in generale si ha che un numero razionale α ha, per definizione, misura $\mu(\alpha) = 1$. Il teorema di Thue-Siegel-Roth, con il quale Roth si è assicurato la medaglia Fields, afferma che se α è un numero algebrico irrazionale allora $\mu(\alpha) = 2$; i numeri trascendenti hanno misura d'irrazionalità maggiore o uguale a due.

Al contrario di quanto si possa pensare, trovare la misura di irrazionalità di un numero non è affatto banale, ciò dimostra quanto questo campo sia ancora così delicato e sfuggente; per un elenco dei risultati fin qui ottenuti si veda [10].

Riferimenti bibliografici

[1] G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset, S. Vessella *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems 25 (2009), 47 pp.

[2] M. Filaseta, http://www.math.sc.edu/filaseta/gradcourses/Math785/Math785Notes5.pdf.

[6] Per maggiori informazioni si rimanda ai testi [7] e [8].

[7] La dimostrazione per la misura di Lebesgue può essere trovata su [2].

[3] D. Fox, C. Pucci, *The Dirichlet problem for the wave equation*, Ann. Mat. Pura ed Appl. 46 (1958), pp. 155-182.

[4] M. Gevrey, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. Premier mémoire.*, Ann. Scient. École Norm. Supér. 3 (1918), pp. 129-190.

[5] J. Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin (1902), pp. 49-52.

[6] A. Y. Khinchin, *Continued Fractions.* University of Chicago Press, Chicago, 1964.

[7] J. Liouville, *Nouvelle démonstration d'un théoreme sur les irrationalles algébriques, inséré dans le Compte rendu de la dernière séance*, C. R. Acad. Sci. Paris 18 (1844), pp. 910-911.

[8] J. Liouville, *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationelles algébriques*, J. Math. Pures Appl. 16 (1851), pp. 133-142.

[9] K. Mahler, *On the approximation of* π, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 56/Indagationes Math. 15 (1953), pp. 30-42.

[10] MathWorld
http://mathworld.wolfram.com/IrrationalityMeasure.html.

[11] G. Papi, C. Pucci, *A not well posed problem for the wave equation*, Ann. Mat. Pura Appl. 133 (1983), pp. 285-304.

[12] G. Papi, *Diophantine approximation in short intervals*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 6 (1979), pp. 703-717.

[13] G. Papi, *On the stability of the Dirichlet problem for the vibrating string equation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 6 (1979), pp. 719-728.

[14] O. Perron, *Irrationatgahlen.* Chelsea, New York, 1948.

[15] G. Sansone, G. Vitali, *Moderna Teoria Delle Funzioni Di Variabile Reale. Parte Seconda.* Zanichelli, Bologna, 1935.

[16] J. Steuding, *Diophantine Analysis.* Chapman & HallCRC, Boca Raton, 2005.

[17] H. F. Weinberger, *A first Course in Partial Differential Equations.* Xerox College Publishing, Toronto, 1965.